Una Revisión de la Cinemática de Cuerpos Rígidos y la Velocidad Espacial

Luis Enrique Vargas Azcona

21 de septiembre de 2015

Resumen

Este documento pretende explicar cómo caracterizar los movimientos de cuerpos rígidos y al mismo tiempo, explicar a partir de la cinemática clásica de partículas y cuerpos rígidos qué significa la velocidad espacial y cómo representarla.

1. Introducción

1.1. Base Canónica

La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$ que cumple con la peculiaridad de que cada vector de dicha base tiene 1 en una entrada y 0 en todas las demás entradas.

Para referirnos a esos vectores vamos a usar e_i para un vector cuya i-ésima entrada es un 1 y el resto de sus entradas son 0.

1.2. Producto Escalar

Usaremos bastante un producto escala en $\mathbb{R}^n$, el cual está definido por la siguiente fórmula:

$$a \cdot b = a^T b \tag{1}$$

1.3. Derivadas

Para hablar de derivadas, usaremos la siguiente definición

Para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Definición 1 (Derivada)**.** *Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$, la derivada de f es otra función f' definida sobre $\mathbb{R}$ de tal manera que:*

$$f'(t) = \lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{||h||} \tag{2}$$

Para toda $t \in \mathbb{R}$.

De esta manera, cuando un apostrofe $'$ se encuentre inmediatamente después del nombre de una función, nos estaremos refiriendo a la derivada de esa función, el doble apóstrofe $''$ indicará la derivada de la derivada y así sucesivamente. Es decir, $f'' = (f')'$, $f''' = ((f')')'$, etc.

Esta definición a pesar de ser muy conocida tiene algunas peculiaridades:

- Especifica que el dominio es $\mathbb{R}$, pero el codominio no está especificado. La mayoría de funciones que vamos a considerar son funciones cuyo codominio es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^n$. En el caso de que se utilize $\mathbb{R}^n$ como codominio, la norma a utilizar será $||h|| = \sqrt{h \cdot h}$ y en caso de que el codominio sea $\mathbb{R}$, la norma será $||h|| = |h|$.

  Cuando el codominio no sea ni $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{R}^n$, se especificará cómo llevar a cabo la derivación.

- Puede resultar confusa para aquellos que estén acostumbrados a la notación de Leibniz en cuyo caso llamarían a f' como $\frac{Df}{Dt}$.

  Hay que dejar en claro un par de cosas: La primer cosa es que tanto f como f' son funciones, $f(t)$ y $f'(t)$ son puntos y la segunda cosa es que como todas las funciones de las cuales consideraremos derivadas serán funciones de una variable, todas las derivadas serán respecto a esa única variable; una manera de pensar esto es que todas las derivadas serán respecto al «tiempo».

  Por ejemplo, no hablaremos de «la derivada de $f(t^2)$» sino de la derivada de una función g tal que $g(t) = f(t^2)$, de tal forma que g' o $g'(t)$ tiene sentido en nuestro contexto pero $(f(t^2))'$ no lo tiene.

2. Partículas y Cuerpos Rígidos

2.1. Partículas

Antes de iniciar con los cuerpos rígidos, es necesario reafirmar ciertas nociones de partículas.

La posición en el espacio de una partícula la representaremos como un punto en $\mathbb{R}^3$. A su vez, la trayectoria de la partícula la representremos como una curva $p(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Por conveniencia vamos a considerar sólo aquellas curvas que sean diferenciables y además estén definidas en todo $\mathbb{R}$.

De esta manera podemos definir velocidad como:

$$v = p' \tag{3}$$

Y aceleración como:

$$a = v' = p'' \tag{4}$$

De tal forma que:

$$v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \tag{5}$$

$$a(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) \tag{6}$$

2.2. Cuerpos rígidos

Definiremos cuerpo rígido como un conjunto de partículas que durante todo su movimiento preserva distancias. Es decir, un cuerpo C es rígido sí y sólo sí para todo par de partículas $p, q \in C$ se cumple que $||p - q||$ es constante.

A diferencia del movimiento de partículas, el movimiento de un cuerpo rígido no se puede representar con una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^3$ ya que no es un solo punto el que se mueve.

Para estudiar el movimiento de un cuerpo rígido en un momento determinado del tiempo, vamos a utilizar una función(o campo vectorial) para saber «hacia qué posición se movió cada partícula», a dicha función la llamaremos «transformación de cuerpo rígido».

Definición 2 (Transformación de Cuerpo Rígido)**.** *Decimos que una función* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, es una transformación de cuerpo rígido si se cumplen las siguientes 2 condiciones:*

- *T preserva distancias, es decir, para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$, $||T(a) - T(b)|| = ||a - b||$.*
- *El determinante de la función R tal que $R(a) = T(a) - T(0)$ para todo $a \in \mathbb{R}^3$ es 1.*

Esta definición deja muchos puntos por aclarar, primeramente es que no involucra partículas ni cuerpos rígidos y además habla de «determinante 1», y en ningún momento se especifica que la función es lineal.

Para aclarar estos dos puntos y entender por qué definir una transformación de cuerpo rígido así, necesitamos tomar en cuenta que si T es una transformación de cuerpo rígido y $R(a) = T(a) - T(0)$, entonces R es lineal (es decir, T es la suma de una función lineal y una traslación), por lo cual tiene sentido hablar de «determinante de R».También hay que tomar en cuenta que si queremos representar la trayectoria de un cuerpo rígido, podemos definir P_t como una función tal que si b es la posición de una partícula en el tiempo 0, entonces $P_t(b)$ sea la posición de dicha partícula en el tiempo t, y resultará que P_t será una transformación de cuerpo rígido.

Con esta explicación ya queda clro por qué definir una transformación de cuerpo rígido así, pero hay varios hechos que no son obvios y habrá que demostrarlos.

Tambien hay que hacer notar que T está definido en todo $\mathbb{R}^3$, a pesar de que no necesariamente hay partículas en todo $\mathbb{R}^3$, esto se debe a que queremos estudiar el movimiento de un cuerpo rígido independientemente de su forma, es decir, T representa una transformación que puede ser aplicada a cualquier cuerpo rígido.

2.3. Transformaciones Rígidas Relativas a un Centro

Consideraremos una transformación de cuerpo rígido T y un punto $c \in \mathbb{R}^3$, a dicho punto lo llamaremos centro. A pesar de que el nombre «centro» puede sonar un tanto pretencioso, el centro puede ser cualquier punto.

Ahora consideremos otra función $R(a) = T(a + c) - T(c)$. Al igual que T, R es otro campo vectorial que a cada punto en $\mathbb{R}^3$ le asigna un vector en $\mathbb{R}^3$, la diferencia es que R representa cómo se transforma cada punto con respecto al centro.

Las consecuencias inmediatas de esta definición son primeramente que $R(0) = 0$, $T(a) = R(a-c)+T(c)$, y que $||R(a)|| = ||T(a+c)-T(c)|| = ||a+c-c|| = ||a||$ para todo $a \in \mathbb{R}^3$, es decir, R preserva norma.

Otra cosa que hay que mencionar es que R además de preservar norma, también preserva distancias, ya que $||R(a) - R(b)|| = ||T(a+c) - T(b+c)|| = ||a+c-b-c||$.

Teorema 1. *R preserva producto escalar; es decir, para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$*

$$u \cdot v = R(u) \cdot R(v) \tag{7}$$

Demostración. Tomemos $a, b \in \mathbb{R}^3$, usando la identidad

$$\frac{||a+b||^2 - ||a-b||^2}{4} = \frac{(a+b)\cdot(a+b) - (a-b)\cdot(a-b)}{4} \tag{8}$$

$$= \frac{4a \cdot b}{4} \tag{9}$$

$$= a \cdot b \tag{10}$$

Tomando en cuenta que R preserva distancias

$$a \cdot b = \frac{||a+b||^2 - ||a-b||^2}{4} = \frac{||R(a)+R(b)||^2 - ||R(a)-R(b)||^2}{4} \tag{11}$$

Concluyendo que

$$a \cdot b = R(a) \cdot R(b) \tag{12}$$

□

Teorema 2. *R es una transformación lineal*

Demostración. Una función se considera transformación lineal cuando es aditiva y homogénea. Primero veremos que es aditiva.

Tomemos la base canónica de $\mathbb{R}^3$: e_1, e_2, e_3. Tenemos que como R preserva producto escalar entonces $R(e_1), R(e_2), R(e_3)$ es una base ortonormal. Por conveniencia definiremos $w_1 = R(e_1), w_2 = R(e_2), w_3 = R(e_3)$.

Al ser base ortonormal, cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$ puede ser expresado como suma de las proyecciones de v sobre esa base, es decir:

$$v = w_1 v \cdot w_1 + w_2 v \cdot w_2 + w_3 v \cdot w_3 \tag{13}$$

Si tomamos $a, b \in \mathbb{R}^3$, podemos expresar de la misma manera a $R(a+b)$:

$$R(a+b) = w_1 R(a+b) \cdot w_1 + w_2 R(a+b) \cdot w_2 + w_3 R(a+b) \cdot w_3 \tag{14}$$

Dado que R preserva producto escalar, tenemos que:

$$\begin{aligned} w_1R(a+b)\cdot w_1 &= w_1(a+b)\cdot e_1 && (15)\\ &= w_1a\cdot e_1 + w_2\cdot e_2 && (16)\\ &= w_1R(a)\cdot w_1 + w_1R(b)\cdot w_1 && (17) \end{aligned}$$

Esto mismo sucede analogamente con w_2 y w_3.

Combinando estos 2 hechos importantes:

$$\begin{aligned} R(a+b) &= w_1R(a)\cdot w_1 + w_1R(b)\cdot w_1 + w_2R(a)\cdot w_2 + && (18)\\ & \quad w_2R(b)\cdot w_2 + w_3R(a)\cdot w_3 + w_3R(b)\cdot w_3 && (19)\\ &= R(a)+R(b) && (20) \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que R es aditiva, falta demostrar que es homogénea.

Tenemos que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$R(\lambda(v)) = w_1R(\lambda v)\cdot w_1 + w_2R(\lambda v)\cdot w_2 + w_3R(\lambda v)\cdot w_3 \qquad (21)$$

Dado que R preserva producto escalar:

$$\begin{aligned} R(\lambda v) &= w_1\lambda v\cdot e_1 + w_2\lambda v\cdot e_2 + w_3\lambda v\cdot e_3 && (22)\\ &= \lambda(w_1v\cdot e_1 + w_2v\cdot e_2 + w_3v\cdot e_3) && (23)\\ &= \lambda(w_1R(v)\cdot w_1 + w_2R(v)\cdot w_2 + w_3R(v)\cdot w_3) && (24)\\ &= \lambda R(v) && (25) \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que R es homogénea.

Por tanto R es una transformación lineal.

□

Teorema 3. *R es invertible*

Demostración. Las condiciones necesarias y suficientes para que una función sea invertible es que sea inyectiva y suprayectiva.

R preserva distancias, eso implica que si para algunos $a, b \in \mathbb{R}^3$ se cumple que $R(a) = R(b)$ entonces $||R(a) - R(b)|| = ||a - b|| = 0$ lo cual implica que $a = b$, por tanto R es inyectiva.

Ahora veremos que también es suprayectiva.

Recordemos que el dominio de R es $\mathbb{R}^3$ y el codominio también es $\mathbb{R}^3$.

Como R preserva producto escalar, entonces $R(e_1), R(e_2)$ y $R(e_3)$ son ortonormales entre sí, por tanto son linealmente independientes, por lo cual la dimensión de la imagen de R es 3.

Dado que el único subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 3 es $\mathbb{R}^3$, entonces la imagen de R es $\mathbb{R}^3$, lo que se traduce en que R es suprayectiva.

Al ser R inyectiva y suprayectiva, es invertible. □

Teorema 4. *La matriz de transformación de R es ortogonal, es decir, la inversa y la traspuesta coinciden.*

Demostración. Vamos a llamar $\hat{R}$ a la matriz de transformación de R, tenemos que la primera columna de la matriz es $\hat{R}e_1 = Re_1$, la segunda columna es $\hat{R}e_2 = Re_2$ y la tercera es $\hat{R}e_3 = Re_3$.

Dado que e_1, e_2 y e_3 son una base ortonormal entonces $\hat{R}e_1, \hat{R}e_2$ y $\hat{R}e_3$ tambien lo son. Esto quiere decir que $\hat{R}e_i(\hat{R}e_j)^T = 0$ cuando $i \neq j$ y $\hat{R}e_i(\hat{R}e_j)^T = 1$ cuando $i = j$.

Y recordemos que la entrada de la fila i, columna j de la matriz $\hat{R}\hat{R}^T$ es precisamente $\hat{R}e_i(\hat{R}e_j)^T$. Eso quiere decir que $\hat{R}\hat{R}^T = I$, por tanto, R es ortogonal. □

Hasta el momento hemos usado la propiedad de que T preserva distancias(y en consecuencia R también) pero aún no hemos utilizado la propiedad de que si el centro es 0 entonces el determinante de R es 1.

Esta propiedad la introducimos con el propósito de descartar las reflexiones, de manera que T sea únicamente rotación y traslación, de tal forma que R debería de ser una rotación, pero la condición de determinante 1 sólo la definimos cuando el centro es 0.

Un hecho agradable que ocurre es que la función R es la misma sin importar donde se coloque el centro, veamos la demostración:

Teorema 5. *Sea T una transformación de cuerpo rígido, sea $c \in \mathbb{R}^3$ un punto y sean R y R_0 funciones tales que:*

$$R(a) = T(a + c) - T(c) \tag{26}$$

$$R_0(a) = T(a) - T(0) \tag{27}$$

Entonces $R = R_0$.

Demostración. Notemos que para todo $a \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} R(a) &= T(a + c) - T(c) + T(0) - T(0) &(28)\\ &= T(a + c) - T(0) - (T(c) - T(0)) &(29)\\ &= R_0(a + c) - R_0(c) &(30) \end{aligned}$$

Como R_0 es lineal entonces $R_0(a + c) - R_0(c) = R_0(a)$, por tanto:

$$R(a) = R_0(a) \tag{31}$$

□

Ahora que ya sabemos que R es lineal, preserva norma y tiene determinante 1, podemos decir con toda confianza que R es una rotación.

A pesar de que «Rotación» es un término ampliamente conocido, será mejor definirlo aquí para evitar cualquier malentendido:

Definición 3 (Rotación)**.** *Una transformación lineal $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una rotación sí y sólo sí:*

- *Preserva norma, es decir para todo $a \in \mathbb{R}^3$, $||a|| = ||R(a)||$.*
- $Det(R) = 1$

Al conjunto de todas las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ lo llamaremos $SO(3)$.

Teorema 6. *Toda rotación $R \in SO(3)$ tiene un eje invariante, es decir, existe $d \in \mathbb{R}^3$ con $d \neq 0$ tal que, $R(\lambda d) = \lambda d$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Tenemos que el determinante de R es 1 y también es el producto de los valores propios de R(tomando en cuenta su multiplicidad) además $|R(v)| = |v|$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$, ello implica que el único valor propio real que puede tener R es 1.

Si algún $z \in \mathbb{C}$ es valor propio de R entonces su conjugado también debe de ser valor propio, por lo cual la cantidad de valores propios no reales de R siempre es par. Tomando en cuenta eso y el hecho de que R puede tener a lo más 3 valores propios diferentes, podemos concluir que R tiene un valor propio real, y ya sabemos que debe de ser 1.

El espacio propio del valor propio 1 es el eje invariante de R.

□

A modo de recapitulación estas son las principales propiedades de las rotaciones:

Teorema 7. *Para toda rotación $R \in SO(3)$ se cumple que:*

- *R preserva producto escalar, es decir, para todo $a, b \in \mathbb{R}^3$, $Ra \cdot Rb = a \cdot b$.*
- *R es ortogonal, es decir $RR^T = I$*
- *R es invertible.*
- *R tiene un eje invariante.*

Las pruebas ya se mostraron en la presente subsección.

Por último para dejarlo claro:

Teorema 8. *Toda transformación rígida es una rotación seguida de una traslación*

Demostración. Ya habíamos dicho que si T es una transformación de cuerpo rígido y R es una función tal que $R(a) = T(a + c) - T(c)$ entonces R es una rotación y además $R(a) = T(a) + T(0)$. La consecuencia directa de esto es que $T(a) = R(a) - T(0)$, lo cual significa que T es una rotación más una traslación.

□

Al conjunto de todas las transformaciones rígidas en $\mathbb{R}^3$ lo llamaremos $SE(3)$

2.4. Marcos de Referencia

Antes de continuar el estudio de los cuerpos rígidos, vamos a hacer una pausa para hablar de marcos de refencia.

Como ya sabemos, una partícula no es punto en el espacio, ya que tiene una trayectoria y su posición va cambiando de un momento a otro, por este motivo puede ser complicado referirse a una partícula.

Esto lo vamos a hacer asociándole al cuerpo rígido un centro con 3 ejes de coordenadas, a estas 2 cosas juntas les llamaremos «marcos de referencia».

Definición 4. *Un marco de referencia de un espacio vectorial de dimensión finita V definido sobre $\mathbb{R}$ es una base y un vector de dicho espacio vectorial.*

*A la base le llamaremos **ejes**, y al otro vector le llamaremos **centro**.*

Consideremos el vector $v \in V$, y un marco de referencia $B = (\{b_1, ..., b_n\}, c)$. Sabemos que existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \ \in \mathbb{R}$ tales que:

$$v = c + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \tag{32}$$

Al vector $(\lambda_i, ..., \lambda_n)$ lo llamamos vector de coordenadas de v en el marco de referencia B.

No hay una regla de cómo describir un cuerpo rígido, pero es preferible hacerlo de la manera que sea lo mas simple posible.

Cuando consideramos un cuerpo rígido, normalmente consideramos su centro de masa como el vector 0 (aún no es necesario saber qué es el centro de masa, pero para darse una idea, el centro de masa de una esfera es el centro de la esfera y el de un cubo es el promedio de sus vértices) y en caso de que tenga ejes, los alineamos con los ejes cartesianos.

En la vida real no existe ninguna base canónica, sino que nosotros elegimos con qué coordenadas ver al objeto, esas coordenadas que elegimos tienen un marco de referencia, y lo llamamos «marco de referencia del objeto».

La utilidad de este marco de referencia es que puede servir para identificar a cada partícula del cuerpo rígido con un único vector. De esta manera si el cuerpo rígido se está moviendo, vamos a pensar que se está moviendo su marco de referencia junto con el objeto, de esta manera todas las particulas de un cuerpo rígido tienen coordenadas constantes en el marco de referencia del objeto.

3. Velocidades de Cuerpos Rígidos

Las transformaciones rígidas pueden servir para expresar la posición de todas las particulas en un momento del tiempo, pero no es suficiente para representar el movimiento de un cuerpo rígido durante toda su trayectoria; para eso es necesario asignar a cada instante t en el tiempo una función $P_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Como ya se había dicho, las trayectorias de las partículas son diferenciables, así que esto también se debe de reflejar en P_t. Veamos qué implicaciones tiene:

Si $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es la trayectoria de una partícula en un cuerpo rígido que se mueve según P_t y a es el vector de coordenadas de la partícula en el marco de referencia del objeto entonces $p(t) = P_t(a)$, y por hipótesis las trayectorias de las partículas son diferenciables, por tanto p es diferenciable.

Dado que P_t describe un movimiento que puede ser aplicado a cualquier cuerpo rígido, entonces $p(t) = P_t(a)$ debe de ser diferenciable para cualquier valor de a.

Una vez explorado el panorama de cómo estudiar el movimiento de los cuerpos rígidos, procederemos a definirlo:

Definición 5 (Movimiento de Cuerpo Rígido)**.** $P_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *es un movimiento de cuerpo rígido sí y sólo sí se cumplen las siguientes condiciones:*

- *Para todo $t \in \mathbb{R}$, $P_t \in SE(3)$*

- *El espacio se mueve de manera diferenciable, es decir, para todo $a \in \mathbb{R}^3$, la función $p(t) = P_t(a)$ es diferenciable.*

Para estudiar el movimiento de las rotaciones del cuerpo rígido vamos a considerar una partícula en el cuerpo, la cual llamaremos «centro» y vamos a llamar c a su vector de coordenadas en el marco de referencia del objeto.

De esta manera la posición del centro en el tiempo t es $P_t(c)$, así que la rotación del cuerpo en el tiempo t está dada por la siguiente función que llamaremos Q_t:

$$Q_t(a) = P_t(a + c) - P_t(c) \tag{33}$$

3.1. Velocidades de las Rotaciones

Para estudiar las velocidades de las rotaciones vamos a necesitar la velocidad instantanea que hay para cada punto en el espacio.

Si tomamos una partícula p_1 cuyas coordenadas en el marco de referencia del objeto son a, entonces tendremos que $p_1(t) = P_t(a) = Q_t(a) + P_t(c)$, vamos a definir p como $p(t) = P_t(a) - P_t(c) = Q_t(a)$(es decir, el vector de desplazamiento desde c hasta p_1).

Sabemos que la distancia entre p_1 y c es contante, por tanto $f(t) = \frac{1}{2}||p(t)||^2$ es constante, por lo tanto $f'(t) = 0$, y además $f'(t) = p'(t) \cdot p(t)$, eso quiere decir que $p'(t)$ y $p(t)$ son ortogonales.

Para definir la velocidad instantanea de cada punto del espacio alrededor del centro, queremos una función V_t tal que $V_t(p(t)) = p'(t)$, para encontrar esa función podríamos hacer uso del hecho de que $p(t) = Q_t(a)$ pero hay un problema aquí: no podemos simplemente derivar Q_t, ya que Q_t es una función que toma puntos en el plano y los convierte en otros puntos en el plano, esta función no toma en cuenta el tiempo, y queremos derivar respecto al tiempo.

Para salir de esta complicación vamos a definir otra función $\hat{Q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3x3}$, es decir, tiene dominio en $\mathbb{R}$ y codominio en el conjunto de las matrices de 3 por 3.

La idea consiste en tener para cada instante de tiempo t, la matriz de transformación de Q_t. Es decir:

$$(\hat{Q}(t))(a) = Q_t(a) \tag{34}$$

De esta manera $p(t) = (\hat{Q}(t))(a)$.

Vamos a derivar $\hat{Q}$ entrada por entrada de la misma manera que una función vectorial se deriva coordenada a coordenada.

Por lo cual

$$p'(t) = (\hat{Q}'(t))(a) \tag{35}$$

Recordando que $p(t) = Q_t(a)$:

$$a = \hat{Q}_t^{-1}(p(t)) \tag{36}$$

Por lo que

$$p'(t) = (\hat{Q}'(t))(\hat{Q}(t))^{-1}(p(t)) \tag{37}$$

Así que si queremos definir una función V_t que cumpla que $V_t(p(t)) = p'(t)$ debemos definirla así:

$$V_t(v) = \hat{Q}'(t)(\hat{Q}(t))^{-1}(v) \tag{38}$$

Obsérvese que dicha función está definida para todo $\mathbb{R}^3$ y que al ser Q_t invertible entonces la matriz $\hat{Q}(t)$ tiene inversa.

También hay que resaltar que a pesar de que definimos V con la intención de que $V_t(p(t)) = p'(t)$, la definición de V_t no hace ninguna mención de p o de a, sino que es una transformación lineal que para cualquier $v \in \mathbb{R}^3$ se cumple que $V_t(v) \cdot v = 0$.

Teorema 9. *La matriz de transformación de V_t es antisimétrica*

Demostración. Sea $\hat{V}$ la matriz de transformación de V_t(estamos dejando fijo al parámetro t). Tenemos que $\hat{V}$ es antisimétrico sí y sólo sí $\hat{V}x \cdot y = -y \cdot \hat{V}x$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Ya sabemos que $\hat{V}_t(v) \cdot v = 0$ ahora, tomamos $x, y \in \mathbb{R}^3$ y observamos que:

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{V}(x+y) \cdot (x+y) && (39)\\
&= \hat{V}x \cdot x + \hat{V}y \cdot y + \hat{V}x \cdot y + \hat{V}y \cdot x && (40)\\
&= \hat{V}x \cdot y + \hat{V}y \cdot x && (41)
\end{aligned}$$

Esto implica que $\hat{V}x \cdot y = -y \cdot \hat{V}x$, por tanto $\hat{V}$ es antisimétrica

□

Al ser la matriz de transformación V_t antisimétrica, para cada $t \in \mathbb{R}$ existe un $w_t \in \mathbb{R}^3$ tal que $V_t(v) = w_t \times v$, además, podemos expresar la derivada de p simplemente como $p'(t) = w_t \times p(t)$.

Al vector w_t lo llamaremos velocidad angular en el tiempo t.

3.2. Mapa Exponencial e Interpretación Geométrica de la Velocidad Angular

Ya hemos hablado de lo que para $t \in \mathbb{R}$ existe $w_t \in \mathbb{R}^3$ tal que $\hat{Q}'(t) = w_t \times \hat{Q}(t)$ y que a w_t lo llamamos velocidad angular en el tiempo t.

Sin embargo, no hemos hablado de las consecuencias de ello.

La primera consecuencia es que si p es la trayectoria de una partícula con respecto al centro del cuerpo y en el tiempo t se cumple que $p(t) = \lambda w_t$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $p'(t) = 0$, esto quiere decir que tienen velocidad instantánea 0 todas las partículas que en el tiempo t se encuentran en la recta con dirección w_t que pasa por el centro del cuerpo.

En el caso de que w fuera constante, el cuerpo rígido estaría rotando alrededor del eje invariante w, si $w = 0$ el cuerpo rígido se encontraría inmóvil.

Si consideramos un plano W ortogonal a w, y tomamos una magnitud $l > 0 \in \mathbb{R}$, tendriamos que el conjunto de todos los vectores con magnitud l en W es un círculo (es la intersección de una esfera con un plano), y además para todo d en este círculo se cumpliría que la velocidad instantánea de una partícula en d sería:

$$w \times d \tag{42}$$

Esto implica que en el plano W todas las partículas están girando en órbitas circulares(recordamos que la velocidad de una partícula girando en una órbita circular es tangente a su trayectoria pero sin salirse del plano donde está su trayectoria).

Si tomamos un punto en una traslación del plano P, es decir $a = \lambda w + d$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $d \in P$, tenemos que:

$$w \times a = w \times d \tag{43}$$

Esto implica que el campo vectorial $\hat{Q}'(t)$ consta de planos ortogonales a w con partículas girando en órbitas circulares alrededor de la dirección w, también cuanto mayor sea $||w||$ mas rápido rotaría el espacio.

Si la velocidad angular consta de un eje invariante alrededor del cual está rotando todo el espacio y además toda rotación tiene un eje invariante, sería interesante poder usar w para representar cualquier rotación.

Si $\hat{Q}(0) = I$, entonces tendríamos que $\hat{Q}(1)$ sería una rotación alrededor del eje $\frac{w}{||w||}$ y con un ángulo proporcional a $||w||$, por lo cual es natural representar la rotación $\hat{Q}(1)$ usando el vector w, ahora veremos cual sería el valor de $\hat{Q}(1)$.

Para generalizar vamos a definir otra función en lugar de trabajar con $\hat{Q}$:

Sea $w \in \mathbb{R}^3$ y sea $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3x3}$ una función tal que $M(0) = I$ y $M'(t) = (w\times)M(t)$.

Ahora, para encontrar el valor de $M(1)$ vamos a usar el hecho de que:

$$M(t) = \exp((w\times)t) \tag{44}$$

Debido a que la solución de cualquier ecuación diferencial de la forma $f(t) = Af(t)$, $f(0) = a$ con $t \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es precisamente $f(t) = exp(At)f(0)$.

Asi que $M(1) = \exp(w\times)$

La manera de representar una rotación como
$exp(w\times)$ es conocida como **mapa exponencial**, sin embargo esta expresión aún no nos es suficiente para trabajar con rotaciones, ya que nos dice el eje invariante pero no nos dice explícitamente el ángulo ni tampoco la manera de calcular las entradas de la matriz.

Recordando la definición de exp, tenemos que:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{45}$$

Para poder calcular esta serie infinita usaremos el siguiente hecho:

Teorema 10. *Dada una matriz antisimétrica $A = (c\times) \in \mathbb{R}^{3x3}$, se cumple que:*

$$A^2 = cc^T - ||c||^2 I \tag{46}$$

$$A^3 = -||c||^2 A \tag{47}$$

Demostración. Primero que nada hay que notar que si $c = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ entonces $(c\times) = \lambda_1 e_1 \times + \lambda_2 e_2 \times + \lambda_3 e_3 \times$.

Por lo cual:

$$
\begin{aligned}
A^2 &= (\lambda_1 e_1 \times + \lambda_2 e_2 \times + \lambda_3 e_3 \times)^2 && (48)\\
&= \lambda_1^2 (e_1\times)^2 + \lambda_1\lambda_2 (e_1\times)(e_2\times) + \lambda_1\lambda_3(e_1\times)(e_3\times) + && (49)\\
& \quad \lambda_2\lambda_1(e_2\times)(e_1\times) + \lambda_2^2(e_2\times)^2 + \lambda_2\lambda_3(e_2\times)(e_3\times) + && (50)\\
& \quad \lambda_3\lambda_1(e_3\times)(e_1\times) + \lambda_3\lambda_2(e_3\times)(e_2\times) + \lambda_3^2(e_3\times)^2 && (51)
\end{aligned}
$$

Y los valores de los términos de la forma $(e_i\times)(e_j\times)$ son los siguientes:

$$(e_1\times)(e_1\times) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$(e_1\times)(e_2\times) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

$$(e_1\times)(e_3\times) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$(e_2\times)(e_2\times) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

$$(e_2\times)(e_3\times) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$(e_3\times)(e_3\times) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

También hay que tomar en cuenta que si X e Y son matrices antisimétricas entonces $(XY)^T = Y^T X^T = YX$.

Por lo tanto:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_3 \\ \lambda_2\lambda_1 & -\lambda_1^2 - \lambda_3^2 & \lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Lo cual puede expresarse como:

$$A^2 = cc^T - (Ic)^2 + \begin{pmatrix} -\lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{pmatrix} \tag{59}$$

Que a su vez es equivalente a:

$$A^2 = cc^T - I||c||^2 \tag{60}$$

Ahora notemos que $A^3 = A(A^2) = A(cc^T - I||c||^2) = A(cc^T) - A||c||^2$. Además $A(cc^T) = (Ac)c^T$, pero $Ac = c \times c = 0$ por lo cual $A(cc^T) = 0$, por tanto:

$$A^3 = -A||c||^2 \tag{61}$$

$\square$

A continuación calcularemos $\exp((w\times))$ a través de la **Fórmula de Rodrigues**

Teorema 11 (Fórmula de Rodrigues)**.** *Para todo* $w \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $||w|| = 1||$ *se cumple que:*

$$\exp((w\times)t) = I + (w\times)\sin t + (w\times)^2(1-\cos t) \tag{62}$$

Demostración. Por definición de exp:

$$\exp((w\times)t) = I + (w\times)t + \frac{(w\times)^2t^2}{2} + \frac{(w\times)^3t^3}{6} + \frac{(w\times)^4t^4}{24} + ... \tag{63}$$

Usando el teorema 10 y tomando en cuenta que $||w|| = 1$ tenemos que:

$$(c\times)^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(c\times) \tag{64}$$

Cuando n es impar. Y

$$(c\times)^n = (-1)^{\frac{n-2}{2}}(c\times)^2 \tag{65}$$

cuando n es par.
Esto traduce $\exp((w\times)t)$ como:

$$\exp((w\times)t) = I + (t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - ...)(c\times) + (\frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} - ...)(c\times)^2 \tag{66}$$

Lo cual es equivalente a:

$$\exp((w\times)t) = I + (w\times)\sin t + (w\times)^2(1-\cos t) \tag{67}$$

$\square$

Ahora que ya sabemos como calcular un mapa exponencial, vamos a ver sus propiedades.

El hecho de que satisface la ecuación diferencial $M'(t) = w\times f(t)$ y $M(0) = I$ ya implica que es una rotación. Como ya habíamos mencionado antes, w define un eje inmovil, y dado que w es constante en todo el movimiento, w también debe de ser el eje invariante de la rotación.

Observemos que si $||w|| = 1$ entonces la ecuación

$$\exp((w\times)t) = I \tag{68}$$

Sólo tiene solución cuando $\sin t = 0$ y $\cos t = 1$, es decir, cuando $t = k2\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Esto quiere decir que la rotación gira una vuelta completa cada 2π; Además ya habíamos mencionado antes que el campo vectorial definido por $w\times$ consta de órbitas circulares con rapidez constante alrededor de w, por tanto $exp((w\times)t)$ es una rotación por un ángulo t con eje invariante w.

Ahora, si $||w|| \neq 1||$, es posible usar la misma fórmula pero en lugar de utilizar w y t, podemos utilizar $\frac{w}{||w||}$ y $||w||$. Es decir:

$$\exp(w\times) = I + \frac{(w\times)}{||w||}\sin(||w||) + \frac{(w\times)^2}{||w||^2}(1 - \cos||w||) \tag{69}$$

De esta manera con un sólo vector podemos determinar completamente una rotación usando el mapa exponencial.

Otro hecho que hay que notar es que la ecuación $M(t) = I$ tiene soluciones cuando $t||w|| = 2\pi k$, es decir, cuando $t = \frac{2\pi k}{||w||}$, así que el significado de $||w||$ es la rapidez con la cual cambia el ángulo de la rotación, o la rapidez con la que gira el espacio. Esta rapidez está expresada en radianes por unidad de tiempo.

3.3. Caracterización de las Velocidades de Cuerpos Rígidos en Cualquier Marco de Referencia

Como ya habíamos dicho, toda transformación de cuerpo rígido es la composición de una rotación con traslación.

Para ver qué sucede con la velocidad, vamos a tomar un punto a en el marco de referencia del objeto, y vamos a llamar $p(t)$ a la posición de a en el espacio en el tiempo t, es decir:

$$p(t) = P_t(a) = Q_t(a + c) + P_t(c) \tag{70}$$

Por lo cual la velocidad de p es:

$$p'(t) = w_t \times Q_t(a + c) + v_c(t) \tag{71}$$

Donde $v_c(t)$ es la velocidad del centro en el tiempo t. Como $Q_t(a + c) = P_t(a) - P_t(c)$ entonces:

$$p'(t) = w_t \times (p(t) - P_t(c)) + v_c(t) \tag{72}$$

Con esta ecuación podemos calcular la velocidad de cualquier punto en el cuerpo.

Otra propiedad importante de esta ecuación, es que la podemos usar para calcular las velocidades de las partículas en el espacio sin importar qué marco de referencia estemos usando para el cuerpo. Es decir, sin importar cuál sea el valor de a o el de c, podemos calcular la velocidad de la partícula en el tiempo t simplemente conociendo su posición actual $p(t)$, la posición actual del centro $P_t(c)$, la velocidad del centro $v_c(t)$ y la velocidad angular w_t.

Ninguna de esas cosas depende del marco de referencia, simplemente del cuerpo rígido en el tiempo t.

3.4. Orientación de las Rotaciones

Lo que hace diferente a las rotaciones puras de las rotaciones con reflexión es precisamente que el determinante de una rotación es 1.

Por definición el determinante de $Q(t)$ es 1, sin embargo, en esta subsección vamos a ver que si ignoramos ese hecho temporalmente, el determinante de $\hat{Q}$ sigue siendo constante.

Para hacer eso vamos a definir la función $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $D(t) = Det(\hat{Q}(t))$.

Teorema 12. *La función D es constante y además $D = 1$ ó $D = -1$.*

Demostración. Tenemos que el determinante de una matriz de 3 por 3 es igual al triple producto de sus columnas, es decir, para toda $M \in \mathbb{R}^{3x3}$

$$Det(M) = (Me_1) \cdot ((Me_2) \times (Me_3)) \tag{73}$$

Por tanto:

$$D(t) = (\hat{Q}(t)e_1) \cdot ((\hat{Q}(t)e_2) \times (\hat{Q}(t)e_3)) \tag{74}$$

Dado que $\hat{Q}(t)$ preserva norma y producto escalar, el vector $(\hat{Q}(t)e_2) \times (\hat{Q}(t)e_3)$ tiene norma 1 y es multiplo de $\hat{Q}(t)e_1$, por lo cual el valor de $D(t) = (\hat{Q}(t)e_1) \cdot ((\hat{Q}(t)e_2) \times (\hat{Q}(t)e_3))$ sólo puede ser 1 o -1.

También las funciones $Det : \mathbb{R}^{3x3} \to \mathbb{R}$ y $\hat{Q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3x3}$ son continuas, y como D es composición de estas 2 funciones, D también es continua.

Asi que si D no fuera constante, existirían $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = 1$ y $(b_1) = -1$, sea $a_2 = min(a_1, b_1)$ y $b_2 = max(a_1, b_1)$, entonces por el teorema del valor intermedio existiría $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_2 < c < b_2$ tal que $D(c) = 0$, lo cual contradice el hecho de que $D(c)$ sólo puede ser 1 o -1.

Por lo tanto D es constante.

□

Esto quiere decir que si un cuerpo que se está moviendo preserva distancias, entonces su movimiento se puede modelar como un movimiento de cuerpo rígido, ya que el hecho de que el determinante sea 1 solamente depende de elegir un marco de referencia adecuado.

4. Velocidad Espacial

A partir de ahora pondremos mas énfasis en la velocidad de las partículas usando las coordenadas del espacio en lugar de la velocidad de las partículas usando las coordenadas del cuerpo.

4.1. Definición de Velocidad Espacial

Consideremos un movimiento de cuerpo rígido P, de tal manera que P_t es la transformación rígida en el tiempo t, y además consideremos una partícula en el cuerpo tal que su vector de coordenadas dentro del marco de referencia del objeto es a, y su trayectoria está dada por la función p, de tal manera que:

$$p(t) = P_t(a) \tag{75}$$

Lo que queremos es una función V_t, que dado $p(t)$ podamos saber cuánto vale $p'(t)$, sin necesidad de conocer a, es decir:

$$V_t(p(t)) = p'(t) \tag{76}$$

Ya vimos en la sección anterior que:

$$p'(t) = w_t \times (p(t) - P_t(c)) + v_c(t) \tag{77}$$

Donde $c \in \mathbb{R}^3$ es un punto arbitrario llamado «centro», $v_c(t)$ es la velocidad del centro en el tiempo t y w_t es la velocidad angular en el tiempo t.

Por ello la manera en la que deberíamos definir V es la siguiente:

Definición 6 (Velocidad Espacial)**.** *Sea P un movimiento de cuerpo rígido, de tal forma que P_t es la transformación rígida en el tiempo t.*

Sea w_t la velocidad angular del cuerpo rígido en el tiempo t.

Sea q la trayectoria de una partícula arbitraria en el cuerpo.

La velocidad espacial en el tiempo t es una función $V_t : \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$V_t(a) = w_t \times (a - q(t)) + V_t(q(t)) \tag{78}$$

Esta definición pude confundir, ya que la velocidad espacial es una propiedad del movimiento de cuerpo rígido, pero hace mención a w_t y a una partícula q.

La confusión desaparece al recordar que la rotación de un cuerpo rígido es exactamente la misma sin importar qué punto se tome como centro, por lo cual la derivada de la rotación debería ser la misma y en conclusión la velocidad $(w_t\times)$ también debería ser invariante sin importar la elección del centro.

Ahora, si consideramos la trayectoria de otra partícula q_1 como centro, tendriamos que la diferencia entre la velocidad espacial tomando q como centro y la velocidad espacial tomando q_1 como centro sería:

$$(w_t \times (a - q(t)) + q'(t)) - (w_t \times (a - q_1(t)) + q_1'(t) \tag{79}$$

que equivale a:

$$w_t \times (q_1 - q)(t) - (q_1 - q)'(t) \tag{80}$$

Pero $(q_1 - q)'(t)$ es precisamente $w_t \times (q_1 - q)(t)$, por lo cual la diferencia entre las 2 expresiones es 0.

Un hecho importante que hay que recalcar es que para conocer V_t sólo es necesario conocer w_t y $V_t(q(t))$, ya que $q(t)$ puede ser cualquier vector arbitrario y el campo vectorial será siempre el mismo. Así que una manera de representar velocidades espaciales con pocos datos, es tomar $q(t)$ como una constante(claro que q rara vez puede ser constante, sin embargo se puede elegir una q distinta para cada t).

4.2. Suma de Velocidades Espaciales

Para motivar el significado de la suma de velocidades espaciales, consideremos una piedra A_1 en la superficie de un planeta A_2 cuya rotación tiene una velocidad angular de ω_1 y que está girando alrededor una estrella con una velocidad angular ω_2. Vamos a pensar que la estrella está en la posición 0.

Vamos a llamar a_1 a las coordenadas de la piedra en el marco de referencia del planeta y a_2 a las coordenadas del planeta en el marco de referencia relativo a la estrella.

Es decir $A_2(t) = R_2(t)a_2$ para alguna rotación R_2 y $A_1(t) = A_2(t) + R_2(t)R_1(t)a_1$ para una rotación R_1.

Esto implica que:

$$A_1 = R_2a_2 + R_2R_1a_1 \tag{81}$$

Supongamos además que $R_1(0) = R_2(0) = I$.

Por lo cual:

$$A_1' = \omega_2 \times R_2 a_2 + ((\omega_2 \times) R_2 R_1 + R_2(\omega_1 \times) R_1) a_1 \tag{82}$$

$$A_1' = A_2' + ((\omega_2 \times) R_2 + R_2(\omega_1 \times))(R_1 a_1) \tag{83}$$

Ahora, si $t = 0$:

$$A_1'(0) = \omega_2 \times a_2 + (\omega_2 + \omega_1) \times a_1 \tag{84}$$

Lo cual es igual a:

$$A_1'(0) = \omega_2 \times A_2(0) + (\omega_2 + \omega_1) \times (A_1(0) - A_2(0)) \tag{85}$$

Vemos como en el momento en el cual todas las rotaciones coinciden sucede que la velocidad angular de un marco de referencia que se está moviendo sobre otro marco de referencia es la suma de las velocidades angulares.

En la práctica no es necesario una afortunada coincidencia para lograr algo así, ya que si queremos calcular las velocidades en el tiempo t, basta con elegir $\hat{a_1} = R_2(t)R_1(t)a_1$ $\hat{a_2} = R_2(t)a_2$ y suponer que todas las rotaciones en el tiempo t son la identidad (sin cambiar sus velocidades angulares).

Es decir, hay que elegir un marco de referencia de los objetos cuyos ejes sean identicos al marco de referencia del mundo.

En el caso de la velocidad espacial, el marco de referencia del dominio y el del codominio son identicos. Así que en el caso del ejemplo del planeta y la piedra, podemos definir estos 2 campos vectoriales:

$$S_1(a) = \omega_1 \times (a - A_2(0)) \tag{86}$$

$$S_2(a) = \omega_2 \times a \tag{87}$$

En este caso S_1 sería la velocidad espacial producida por la rotación del planeta, y S_2 sería la velocidad espacial producida por el giro del planeta alrededor de la estrella, y la velocidad espacial de la piedra sería $S_1 + S_2$:

$$(S_1 + S_2)(a) = (\omega_2 + \omega_1) \times a - \omega_1 \times (A_2(0)) \tag{88}$$

$$(S_1 + S_2)(a) = (\omega_2 + \omega_1) \times a - \omega_1 \times (A_2(0)) + (\omega_2 + \omega_1) \times (A_2(0) - A_2(0)) \tag{89}$$

$$(S_1 + S_2)(a) = (\omega_2 + \omega_1) \times (a - A_2(0)) + \omega_2 \times A_2(0) \tag{90}$$

Nótese que $(S_1 + S_2)(A_1(0)) = A_1'(0)$. Y en este caso en ningún momento necesitamos suponer que $R_1 = R_2 = I$.

Esto nos lleva a definir el siguiente concepto:

Definición 7 (Velocidad Espacial Relativa)**.** *Si dos cuerpos tienen velocidad espacial V_1 y V_2, la velocidad espacial relativa de V_1 con respecto a V_2 es:*

$$V_r = V_1 - V_2 \tag{91}$$

Utilizando estas propiedades los cálculos de velocidades se simplifican enormemente, pero el problema ahora es que hemos definido las velocidades espaciales como propiedades de cuerpos rígidos y a veces puede resultar conveniente manejarlas sin necesidad de pensar en un movimiento de cuerpo rígido detrás de ellas.

4.3. Vectores Espaciales

Ahora nos dedicaremos a estudiar la estructura algebrarica de las velocidades espaciales.

Lo primero que haremos será definir lo que es un vector espacial:

Definición 8 (Vector Espacial)**.** *Un vector espacial es una función* $S : \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que existen* $\omega \in \mathbb{R}^3$*,* $O \in \mathbb{R}^3$ *y satisface la siguiente ecuación:*

$$S(a) = \omega \times (a - O) + S(O) \tag{92}$$

Al conjunto de todos los vectores espaciales lo llamaremos $se(3)$

Ahora, se recapitulan las siguientes propiedades que ya se demostraron para velocidades espaciales:

Teorema 13. *Sean* $S_1, S_2 \in se(3)$ *tales que:*

$$S_1(a) = \omega \times (a - O_1) + S_1(O_1) \tag{93}$$

$$S_2(a) = \omega \times (a - O_2) + S_2(O_2) \tag{94}$$

Para $\omega, O_1, O_2 \in \mathbb{R}^3$*.*

Si algún $b \in \mathbb{R}^3$ *se cumple que* $S_1(b) = S_2(b)$ *entonces* $S_1 = S_2$

Teorema 14. *Sean* $S_1, S_2 \in se(3)$ *tales que:*

$$S_1(a) = \omega_1 \times (a - O) + S_1(O) \tag{95}$$

$$S_2(a) = \omega_2 \times (a - O) + S_2(O) \tag{96}$$

Entonces $S_1 + S_2$ *también es un vector espacial, y cumple que:*

$$(S_1 + S_2)(a) = (\omega_1 + \omega_2) \times (a - O) + S_1(O) + S_2(O) \tag{97}$$

Para que los vectores espaciales justifiquen su nombre de «vector», es necesario que la multiplicación por escalar de un vector espacial siga siendo un vector espacial. Dicha propiedad se cumple:

Teorema 15. *Sea* $S \in se(3)$*, y sea* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Entonces* λS *es un vector espacial y cumple que:*

$$(\lambda S)(a) = (\lambda \omega_1) \times (a - O) + \lambda(S(O)) \tag{98}$$

Ahora que ya hemos visto que los vectores espaciales son cerrados bajo combinaciones lineales, tenemos que $se(3)$ es un espacio vectorial.

4.4. Coordenadas de Plücker

Para trabajar computacionalmente con vectores espaciales es necesario representarlos de alguna manera; como ya se vió, si se fija un punto O en $\mathbb{R}^3$ tanto la velocidad angular como la velocidad lineal(es decir, tanto ω como $S(O)$) se comportan de manera identica a los vectores euclideanos.

En efecto: $se(3)$ es un espacio vectorial de dimensión 6 y sus elementos se pueden representar por coordenadas de la forma (ω, v), para $\omega, v \in \mathbb{R}^3$.

Esas coordenadas para manejar vectores espaciales son llamadas las **coordenas de Plücker**.

A parte de ser simplemente coordenadas, también tienen la propiedad de que son coordenadas en una base de $se(3)$:

$$D = \{D_{Ox}, D_{Oy}, D_{Oz}, d_x, d_y, d_z\} \tag{99}$$

Los elementos D_{Ox}, D_{Oy}, D_{Oz} representan velocidades de rotaciones unitarias alrededor de los ejes x, y y z respectivamente. Por ejemplo $D_{Ox}(a) = e_1 \times a$.

Los elementos d_x, d_y, d_z representan velocidades de traslaciones unitarias sobre cada uno de los ejes x, y y z respectivamente. Por ejemplo $d_x(a) = e_1$.

De esta manera, la velocidad espacial puede ser representada usando solamente vectores de 6 coordenadas, y tanto la suma de vectores como la multiplicación por escalar tienen un sentido físico.